

УДК 517.3

doi:10.21685/2072-3040-2021-4-2

**Восстановление диэлектрической проницаемости
неоднородного диэлектрического тела, расположенного
в полубесконечном прямоугольном волноводе**

Р. О. Евстигнеев¹, М. А. Москалева²

¹ООО «Харман», Нижний Новгород, Россия

²Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹roman_cezar@mail.ru, ²m.a.moskaleva1@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Целью данной работы является восстановление диэлектрической проницаемости неоднородного диэлектрического тела, расположенного в полубесконечном прямоугольном волноводе. Предложенный метод может эффективно применяться при решении ряда задач прикладной электродинамики, таких как дефектоскопия и определение эффективности диэлектрической проницаемости метаматериалов. *Материалы и методы.* Для решения исследуемой задачи использован метод объемных сингулярных интегральных уравнений. *Результаты.* Разработан и обоснован численный метод восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного диэлектрического тела, расположенного в полубесконечном прямоугольном волноводе. Представлены численные результаты. *Выводы.* Предложенный метод может быть эффективно использован для конструирования нанокомпозитов и наноструктур, а также для их исследования методом неразрушающего контроля.

Ключевые слова: краевая задача, обратная задача дифракции, интегродифференциальное уравнение, тензор Грина

Финансирование: работа поддержана грантом Президента РФ № МК-2965.2021.1.1.

Для цитирования: Евстигнеев Р. О., Москалева М. А. Восстановление диэлектрической проницаемости неоднородного диэлектрического тела, расположенного в полубесконечном прямоугольном волноводе // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 17–26. doi:10.21685/2072-3040-2021-4-2

**Recovering the permittivity of an inhomogeneous dielectric
body in a semi-infinite rectangular waveguide**

R.O. Evstigneev¹, M.A. Moskaleva²

¹“Kharman” LLC, Nizhni Novgorod, Russia

²Penza State University, Penza, Russia

¹roman_cezar@mail.ru, ²m.a.moskaleva1@gmail.com

Abstract. *Background.* The purpose of this work is to restore the permittivity of an inhomogeneous dielectric body located in a semi-infinite rectangular waveguide. The proposed method can be effectively applied to solving a number of problems in applied electrodynamics, such as flaw detection and determination of the metamaterials' permittivity. *Material and methods:* To solve the studying problem, we used the method of volumetric singular integral equations. *Results:* A numerical method for reconstructing the dielectric constant of an inhomogeneous dielectric body located in a semi-infinite rectangular

waveguide has been developed and substantiated. Numerical results are presented.. *Conclusions:* The proposed method can be effectively used for the design of nanocomposites and nanostructures, as well as for their study by the method of non-destructive testing.

Keywords: boundary value problem, inverse diffraction problem, integro-differential equation, Green's tensor

Acknowledgments: the work was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-2965.2021.1.1.

For citation: Evstigneev R.O., Moskaleva M.A. Recovering the permittivity of an inhomogeneous dielectric body in a semi-infinite rectangular waveguide. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2021;(4):17–26. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-4-2

Введение

Рассматривается проблема восстановления диэлектрической проницаемости тел, имеющих составную структуру. Предположим, что тело находится в полубесконечном прямоугольном волноводе, при этом падающее поле создается точечным источником, расположенным вне тела. Мы восстанавливаем диэлектрическую проницаемость неинвазивными методами, используя измерения величины поля в точках наблюдения, находящихся вне тела [1–4].

На практике подобные задачи возникают при моделировании и создании наноматериалов с заданными свойствами, а также при восстановлении характеристик образцов композитных анизотропных материалов по результатам измерения поля вне тела.

Для численного решения обратной задачи предлагается использовать двухшаговый метод. Этот метод основан на сведении обратной задачи к объемному сингулярному интегральному уравнению и дополнительной процедуре пересчета диэлектрической проницаемости тела. Одно из главных преимуществ этого метода в том, что не требуется начального приближения. Для сокращения времени расчетов и повышения их эффективности можно использовать методы регуляризации Тихонова и различные методы предобуславливания [5, 6]. Таким образом, предложенный метод может быть эффективно использован для конструирования нанокомпозитов и наноструктур, а также для их исследования методом неразрушающего контроля.

1. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Будем рассматривать полубесконечный прямоугольный волновод $P := \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < +\infty\}$ с идеально проводящей границей ∂P . Пусть в P находится тело Q . Известно, что оно характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной ограниченной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$. Функция $\varepsilon(x)$ такова, что $\varepsilon \in L_\infty(Q)$ и $\varepsilon^{-1} \in L_\infty(Q)$. Также тело обладает кусочно-гладкой границей ∂Q .

Рассмотрим задачу дифракции монохроматического электромагнитного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на Q . Источником падающего поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ является электрический ток j_E^0 , локализованный в P .

Будем искать слабые (обобщенные) решения уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon \mathbf{E} + j_E^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (1)$$

где ω – круговая частота.

Поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ должно удовлетворять граничным условиям на стенках полубесконечного волновода:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0, \quad (2)$$

условиям излучения на бесконечности

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{pmatrix} + \sum_p R_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(1)}|x_3|) \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega\epsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} + \\ + \sum_p Q_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(2)}|x_3|) \begin{pmatrix} i\omega\mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times \mathbf{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\Pi = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ – прямоугольник с введенным на нем двумерным оператором Лапласа $-\Delta$; $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi(x_1, x_2)$ и $\lambda_p^{(2)}$, $\Psi(x_1, x_2)$ – полная система собственных значений и ортогональных нормированных в $L_2(P)$ собственных функций оператора Лапласа с условиями Дирихле и Неймана на границе Π соответственно,

$$\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}, \quad \operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} \geq 0, \quad k\gamma_p^{(j)}, \quad k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0, \quad (4)$$

где k – волновое число свободного пространства, $\nabla_2 \equiv \mathbf{e}_1 \partial / \partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial / \partial x_2$.

Мы также будем полагать, что $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ – это известное поле (падающая волна), являющееся решением уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu^0|_{\partial P} = 0 \quad (6)$$

в отсутствие тела Q .

Решения $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ уравнения (1) могут быть выражены в аналитической форме через j_E^0 с помощью тензора Грина

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_E^1 & 0 & 0 \\ 0 & G_E^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_E^3 \end{pmatrix},$$

где

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|) + \exp(-\gamma_{nm}|x_3 + y_3|)}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0n})} \times \\ \times \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|) + \exp(-\gamma_{nm}|x_3 + y_3|)}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0n})} \times \\ \times \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|) + \exp(-\gamma_{nm}|x_3 + y_3|)}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0n})} \times \\ \times \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2.$$

Здесь $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня

выбирается так, чтобы выполнялись условия: $\text{Im } \gamma_{nm} > 0$ или $\text{Re } \gamma_{nm} \geq 0$, если $\text{Im } \gamma_{nm} = 0$. Подробная постановка задачи (1)–(6) и получение отвечающего интегродифференциального уравнения (7) представлены в [7, 8];

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy. \quad (7)$$

2. Обратная задача дифракции

Мы используем рассеянное поле, измеренное вне тела, чтобы восстановить диэлектрическую проницаемость тела. Предположим, что тело Q находится в полубесконечном прямоугольном волноводе P . Характеристики поля, необходимые для восстановления диэлектрической проницаемости тела, измеряются в точках наблюдения x_c . Заклучим x_c в некий объем пространства, представляющий набор нескольких параллельных между собой плоскостей S . Плоскости S расположены перпендикулярно оси Ox_3 [9].

Геометрия задачи показана на рис. 1. Представленное на рисунке тело является прямоугольным параллелепипедом, но в общем случае предложенный численный метод не налагает дополнительных ограничений на форму тела, достаточно заключить тело, имеющее произвольную форму в прямоугольный параллелепипед.

Переходим к построению численного метода.

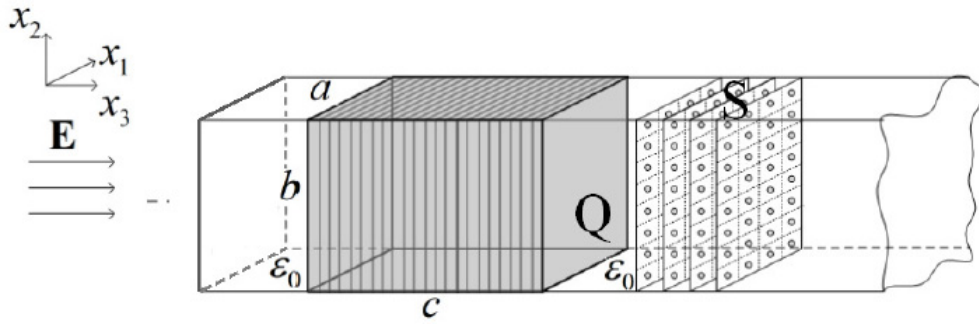


Рис. 1. Геометрия задачи

Заклучим тело Q в прямоугольный параллелепипед Θ , затем выберем на нем регулярную прямоугольную сетку:

$$\Theta = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\},$$

ячейки которой определяются как

$$\Theta_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\}.$$

Узлы сетки определяются как

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1} k, \quad x_{2,b} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3} m,$$

где $k = 0, \dots, N_1 - 1$, $l = 0, \dots, N_2 - 1$, $m = 0, \dots, N_3 - 1$; размер вычислительной сетки равен $N = N_1 \times N_2 \times N_3$;

$$X_1 = \frac{\pi x_1}{a}, \quad X_2 = \frac{\pi x_2}{b}, \quad H_1 = \frac{\pi h_1}{a}, \quad H_2 = \frac{\pi h_2}{b}.$$

В уравнении (7) интегралы могут быть вычислены аналитически, так как базисные функции равны 1 внутри Θ_{klm} . Для компонентов тензора Грина над каждым из Θ_{klm} имеем выражения

$$\begin{aligned} G_I^1 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos(nX_1) \sin(mX_2) \times \\ &\times \cos(nH_1(i_1 + 0.5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0.5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right) + \\ &+ \frac{2H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{0m}^0(x_3)}{m\gamma_{0m}^2} \sin(mX_2) \sin(mH_2(i_2 + 0.5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right), \\ G_I^2 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \sin(nX_1) \cos(mX_2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin(nH_1(i_1 + 0.5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right) \cos(mH_2(i_2 + 0.5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right) + \\ & + \frac{2H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n0}^0(x_3)}{n\gamma_{n0}^2} \sin(nX_1) \sin(nH_1(i_1 + 0.5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right), \\ & G_I^3 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \sin(nX_1) \sin(mX_2) \times \\ & \times \sin(nH_1(i_1 + 0.5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0.5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right), \end{aligned}$$

где

$$f_{nm}^0(x_3) = \begin{cases} \exp(-(x_3 - (i_3 + 1)h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-(x_3 - i_3h_3)\gamma_{nm}) + \\ + \frac{\exp(i\gamma_{nm}(x_3 + i_3h_3))}{i\gamma_{nm}} (\exp(i\gamma_{nm}h_3) - 1), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1)h_3, \\ \exp(-(i_3h_3 - x_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) + \\ + \frac{\exp(i\gamma_{nm}(x_3 + i_3h_3))}{i\gamma_{nm}} (\exp(i\gamma_{nm}h_3) - 1), & \text{если } x_3 < i_3h_3, \\ 2 - \exp(-(x_3 - i_3h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-(x_3 - (i_3 + 1)h_3)\gamma_{nm}) + \\ + \frac{\exp(i\gamma_{nm}(x_3 + i_3h_3))}{i\gamma_{nm}} (\exp(i\gamma_{nm}h_3) - 1) & \text{иначе,} \end{cases}$$

$X_1 = \frac{\pi x_1}{a}$, $X_2 = \frac{\pi x_2}{b}$, $H_1 = \frac{\pi h_1}{a}$, $H_2 = \frac{\pi h_2}{b}$, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$, $x_{i1} = (i_1 + 0.5)h_1$ – координаты точек коллокации.

Разобьем тело Q на N непересекающихся подобластей Q_i . Также Q_i должны состоять из объединения Θ_{klm} . Полагаем, что диэлектрическая проницаемость постоянна в каждой из Q_i .

Значения дифрагированного поля в точках x_c могут быть измерены экспериментально, либо можно решить задачу (1)–(5), являющуюся прямой задачей дифракции, и получить смоделированные значения поля $\mathbf{E}(x)$ внутри тела Q , а затем вычислить $\mathbf{E}(x_c)$ в точках $x = x_c$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_c) = & \mathbf{E}^0(x_c) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \left(\frac{\epsilon(y)}{\epsilon} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \left(\frac{\epsilon(y)}{\epsilon} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \notin Q, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\mathbf{E}_0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \exp\left(-i \gamma_1^{(2)} x_3\right) -$$

падающее поле.

Далее решаем уравнение (8) относительно неизвестной функции

$$\mathbf{J}(y) = \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - 1 \right) \mathbf{E}(y).$$

Первый шаг метода заключается в решении интегрального уравнения первого рода:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x_c)}{\left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - 1 \right)} - \mathbf{E}^0(x_c) &= k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \notin Q, \end{aligned} \quad (9)$$

при этом используются значения поля в точках наблюдения, полученные ранее.

После того как мы нашли $\mathbf{J}(x)$, переходим ко второму шагу метода, а именно определяем диэлектрическую проницаемость тела в каждой из под областей, решая уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x)}{\left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - 1 \right)} - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (10)$$

относительно выражения $\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - 1$.

3. Численные результаты

В качестве примера представим восстановленные значения диэлектрической проницаемости тела, полученные при решении задачи предложенным методом. Тело Q , расположенное в прямоугольном волноводе, имеет размеры $2 \times 1 \times 2$ см. Волновое число вне тела $k_0 = 11,7 \text{ GHz}$. Размер расчетной сетки $10 \times 10 \times 10$. Для получения исходных значений мы решили прямую задачу дифракции и получили смоделированные данные.

На рис. 2 представлено исходное абсолютное значение диэлектрической проницаемости тела, на рис. 3 – восстановленное.

Двухшаговый метод позволил восстановить диэлектрическую проницаемость большинства под областей тела.

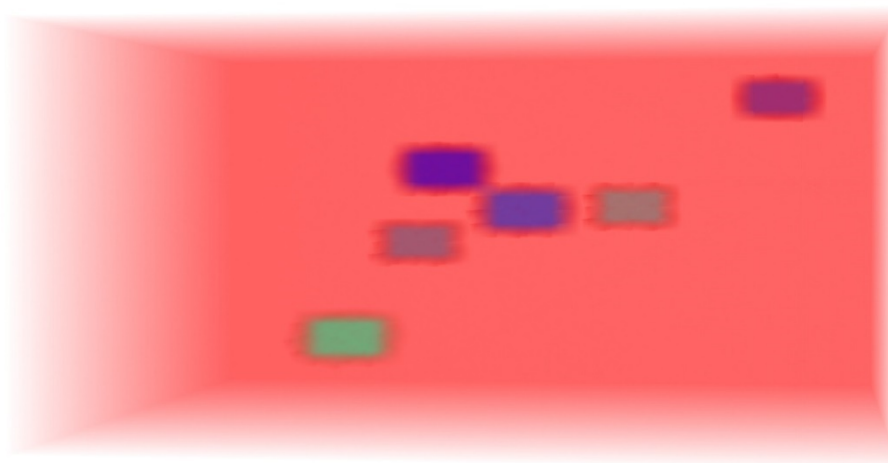


Рис. 2. Смоделированная диэлектрическая проницаемость тела Q

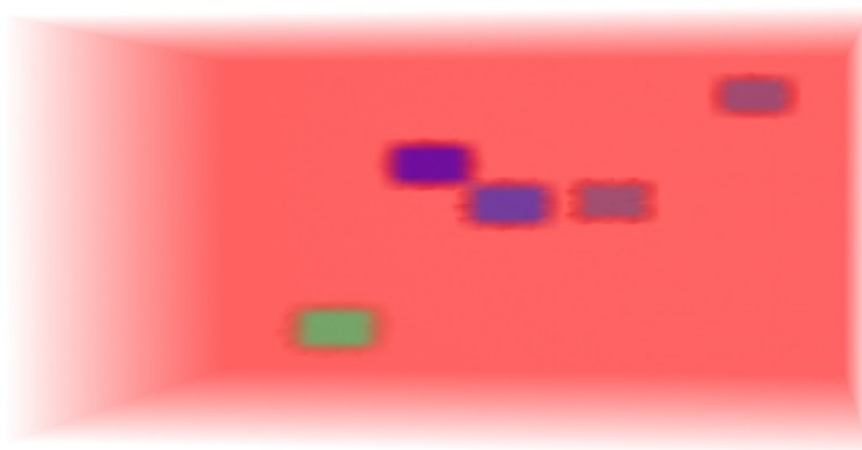


Рис. 3. Диэлектрическая проницаемость тела Q ,
восстановленная двухшаговым методом

Заключение

Рассмотрена обратная задачи дифракции, заключающаяся в восстановлении диэлектрической проницаемости тела в полубесконечном прямоугольном волноводе и предложен численный метод ее решения. Данный метод реализуется в два шага: сначала решается интегральное уравнение первого рода, отвечающее обратной задаче, а затем вычисляется функция диэлектрической проницаемости через ток поляризации. При использовании двухшагового метода не требуется выбирать начальное приближение, что существенно увеличивает круг возможностей для его применения. Приведена визуализация результатов решения обратной задачи восстановления диэлектрической проницаемости тела в прямоугольном волноводе.

На практике разработанный метод может быть применен, например, для исследования нанокompозитов и наноструктур методами неразрушающего контроля, а также для конструирования образцов с заранее определенными характеристиками.

Список литературы

1. Baena J., Marques R., Medina F., Jelinek L. Near-perfect tunneling and amplification of evanescent electromagnetic waves in a wave guide filled by a metamaterial: Theory and experiments // *Phys. Rev. B*. 2005. Vol. 72. P. 075–116.
2. Eves E., Murphy K., Yakovlev V. Reconstruction of complex permittivity with neural-network-controlled FDTD modeling // *Power Electromag. Energy*. 2007. Vol. 4 (41). P. 22–34.
3. Tao Pan, Guo-Ding Xu, Tao-Cheng Zang, Lei Gao. Study of a slab waveguide loaded with dispersive anisotropic // *Applied Physics A*. 2009. Vol. 95. P. 367–372.
4. Usanov D., Skripal A., Romanov A. Complex permittivity of composites based on dielectric matrices with carbon nanotubes // *Technical Physics*. 2011. Vol. 56 (1). P. 102–106.
5. Beilina L., Klibanov M. *Approximate Global Convergence and Adaptive for Coefficient Inverse Problems*. New York : Springer, 2012. 408 p.
6. Romanov V. G. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. Utrecht : VNU, 1986. 239 p.
7. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2009. 268 с.
8. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : ИПРЖР, 1996. 176 с.
9. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г. Обратные задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе. Пенза : Изд-во ПензГУ, 2014. 76 с.

References

1. Baena J., Marques R., Medina F., Jelinek L. Near-perfect tunneling and amplification of evanescent electromagnetic waves in a wave guide filled by a metamaterial: Theory and experiments. *Phys. Rev. B*. 2005;72:075–116.
2. Eves E., Murphy K., Yakovlev V. Reconstruction of complex permittivity with neural-network-controlled FDTD modeling. *Power Electromag. Energy*. 2007;4(41):22–34.
3. Tao Pan, Guo-Ding Xu, Tao-Cheng Zang, Lei Gao. Study of a slab waveguide loaded with dispersive anisotropic. *Applied Physics A*. 2009;95:367–372.
4. Usanov D., Skripal A., Romanov A. Complex permittivity of composites based on dielectric matrices with carbon nanotubes. *Technical Physics*. 2011;56(1):102–106.
5. Beilina L., Klibanov M. *Approximate Global Convergence and Adaptive for Coefficient Inverse Problems*. New York: Springer, 2012:408.
6. Romanov V.G. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. Utrecht: VNU, 1986:239.
7. Smirnov Yu.G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for the study of electrodynamics problems*. Penza: Inf.-izd. tsentr PGU, 2009:268. (In Russ.)
8. Il'inskiy A.S., Smirnov Yu.G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh = Diffraction of electromagnetic waves on conducting thin screens*. Moscow: IPRZhR, 1996:176. (In Russ.)
9. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G. *Obratnye zadachi vosstanovleniya dielektricheskoy pronitsaemosti neodnorodnogo tela v volnovode = Inverse problems of restoring the dielectric permittivity of an inhomogeneous body in a waveguide*. Penza: Izd-vo PenzGU, 2014:76. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Роман Олегович Евстигнеев

кандидат технических наук, инженер-программист, ООО «Харман»
(Россия, г. Нижний Новгород,
ул. Ковалихинская, 8)

E-mail: roman_cezar@mail.ru

Roman O. Evstigneev

Candidate of engineering sciences,
part-programming engineer, "Kharman"
LLC (8 Kovalikhinskaya street,
Nizhni Novgorod, Russia)

Марина Александровна Москалева

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: m.a.moskaleva1@gmail.com

Marina A. Moskaleva

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 29.09.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.10.2021

Принята к публикации / Accepted 15.11.2021